

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

# **МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

# ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕКРЕСТНО АРМИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Влияние анизотропии на напряженно-деформированное состояние (НДС) перекрестно армированных оболочек при различных способах нагружения в рамках пространственных соотношений теории упругости изучено достаточно подробно [1...3]. Установлено, что напряжения и деформации по толщине оболочек изменяются весьма сложным нелинейным образом, не присущим однородным ортотропным тонкостенным конструкциям. Перераспределение напряжений в слоях, обусловленное анизотропией и неоднородностью, должно повлиять и на устойчивость оболочек. Однако на основе уточненных подходов этот эффект ранее не исследовался.

В настоящем сообщении влияние анизотропии на устойчивость изучается для продольно сжатой тонкостенной перекрестно армированной цилиндрической оболочки с геометрическими размерами  $L=0,2$  м;  $R=1$  м;  $H=4 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 1). Механические характеристики связующего  $E_m=2,7 \cdot 10^3$  МПа;  $\nu_m=0,39$  и наполнителя  $E_f=98 \cdot 10^3$  МПа;  $\nu_f=0,2$  композитных однонаправленно армированных слоев (объемный коэффициент армирования  $\psi=0,5$ ) приняты аналогично [3]. Каждый слой в осях, связанных с направлением армирования, считается макроскопически трансверсально-изотропным, и его приведенные характеристики определяются по известным формулам усреднения [4]. Критические значения осевого сжимающего усилия  $T_{11}$  (Н/м) получим на основе конечно-элементного решения геометрически нелинейной осесимметричной задачи теории упругости с использованием алгоритма AAMS, достаточно подробно описанного в работах [2, 3]. В качестве условий закрепления оболочки примем модельные, широко используемые в теории оболочек — неподвижное шарнирное опирание по срединной поверхности оболочки на левом торце и подвижное — на правом, как показано на рис. 1.

Задача расчета геометрически нелинейного НДС методом конечных элементов в форме перемещений сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений [2, 3]

$$f(U) = K_L U + k_N(U) = Q \quad (1)$$

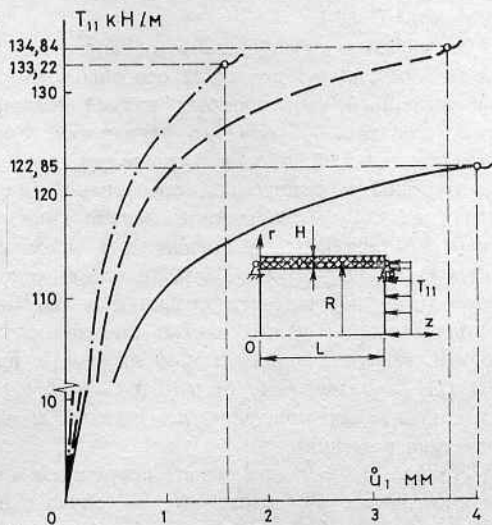


Рис. 1.

методом Ньютона по рекуррентной зависимости

$$[K_L + D(U^{[n]})]U^{[n+1]} = Q - k_N(U^{[n]}) + D(U^{[n]})U^{[n]}; \quad (2)$$

$$U^{[0]} = 0; \quad n = 0, 1, \dots, N: \|U^{[N+1]} - U^{[N]}\| / \|U^{[N+1]}\| < \delta.$$

Здесь  $K_L$  — постоянная симметричная положительно определенная линейная матрица жесткости;  $Q$  — вектор обобщенных нагрузок;  $U$  — вектор узловых неизвестных;  $k_N(U)$  — вектор нелинейных частей, связанный с учетом геометрической нелинейности;  $[D_{ij}(U)] = [\partial k_{Ni} / \partial U_j]$  — симметричная частичная матрица-якобиан [3, 5];  $\delta$  — относительная погрешность решения задачи (1) в норме  $\|U\| = \max_{i=1}^{N_p} |U_{ti}|$  ( $t$  — координатное направление;  $N_p$  — число узлов дискретной модели). Известно [5], что критическому значению нагрузки соответствует равенство нулю определителя матрицы Якоби системы (1)

$$\det I|_{Q^*, U^*} = \det [\partial f_i / \partial U_j]_{Q^*, U^*} = \det [K_L + D(U^*)]|_{Q^*} = 0, \quad (3)$$

или первая предельная точка на траектории нагружения в пространстве, включающем как смещения, так и нагрузки:

$$\left\| \frac{dQ}{dU} \right\| \Big|_{Q^*, U^*} = \|K_L + D(U^*)\| = 0.$$

В силу (3) метод Ньютона (2) в окрестности  $U^*$ ,  $Q^*$  нереализуем. В работе [5] предложен алгоритм, позволяющий определить критические значения  $Q^*$ . Однако в рассматриваемом случае проще поступить следующим образом. Будем осуществлять расчет НДС, задаваясь осевым смещением  $\dot{u}_1$  подвижной опоры. Численная реализация такого подхода состоит в удовлетворении кинематическим граничным условиям методом Пейна—Айронса на каждой итерации (2). При этом  $\dot{Q} = \dot{Q}(\dot{u}_1)$ , и в связи с монотонной зависимостью компонент вектора  $U$  от  $\dot{u}_1$

$$\left\| \frac{dQ(\dot{u}_1)}{dU} \right\| = \|K_L + D(U)\| \|I(U)\| > 0.$$

Вычисляя по найденному вектору узловых смещений деформации, а затем и напряжения, усилие  $T_{11}$  определим как  $T_{11} = \int_0^H \sigma_{11} d\alpha_3$  (анализ НДС проводим в связанной с внутренней поверхностью оболочки системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — суть меридиональная и окружная координаты,  $\alpha_3$  отсчитывается в сторону внешней нормали [3]). Критическое значение  $T_{11}^*$  есть первый локальный максимум на зависимости  $T_{11} = T_{11}(\dot{u}_1)$ .

Перекрестно армированные оболочки, собранные по схеме «самоуравновешенного» пакета слоев, обладают одной особенностью [2]: наиболее сильно эффекты, связанные с анизотропией, для оболочек равной толщины проявляются при малом количестве слоев, и слабее — при его увеличении. Учитывая сказанное, анализ устойчивости продольно сжатой оболочки проведем для двух предельных случаев: двухслойной анизотропной и однородной ортотропной оболочек. В последнем случае компоненты матриц жесткости обобщенного закона Гука  $\sigma^{[k]} = C^{[k]} \epsilon^{[k]}$ ,  $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T$  ( $\epsilon \rightleftharpoons \sigma$ ), различающиеся знаком для смежных слоев, принимаются равными нулю:  $C_{16}^{[k]} = C_{26}^{[k]} = C_{36}^{[k]} = C_{45}^{[k]} = 0$ . Значения углов армирования  $\gamma_{1,2} = \pm 30^\circ$  (именно в этом случае наблюдается весьма значительное влияние анизотропии на НДС [2]). Дополнительно с целью оценки влияния закручивания оболочки, вызванного анизотропией, на устойчивость для  $u_2$  на торцах приняты следующие условия: а)  $u_2(0, \alpha_3)$ ;  $u_2(L, \alpha_3)$  — разрешены; б)  $u_2(0, \alpha_3) = u_2(L, \alpha_3) = 0$  (отсчет окружных смещений проведен относительно центрального сечения  $\alpha_1 = L/2$ , где  $u_2(L/2, \alpha_3) = 0$  в силу свойств симметрии решения).

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов. Сплошные линии отвечают случаю а), штриховые — случаю б) закрепления анизотропной оболочки; штрихпунктирные — ортотропной оболочке. Заметим, что во всех случаях нагруженная характеристика  $T_{11}(\dot{u}_1)$  — мягкого типа. Наиболее податлива анизотропная

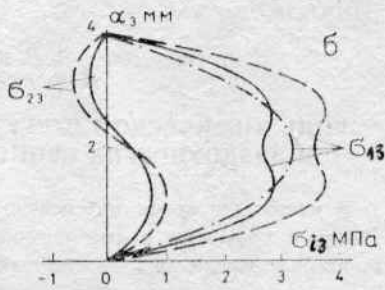
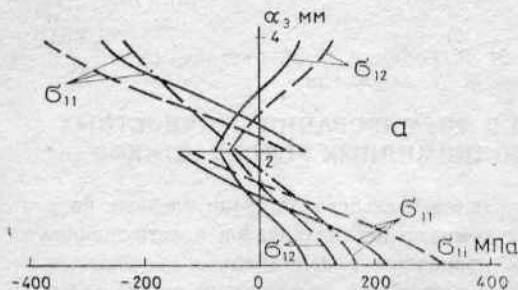


Рис. 2.

оболочка с разрешенными окружными смещениями торцов, наименее — оболочка, рассматриваемая как ортотропная. Критические значения осевых сжимающих усилий анизотропной и ортотропной оболочек при идентичных условиях закрепления равны  $T^*_{11ан}=122,85$  кН/м и  $T^*_{11орт}=133,22$  кН/м соответственно, при этом ортотропная оболочка теряет устойчивость при значительно меньших значениях как осевых смещений (см. рис. 1), так и прогибов:  $\omega_{\max ан}=23,72$  мм;  $\omega_{\max орт}=13,75$  мм. Таким образом, расчет тонкостенных малослойных перекрестно армированных оболочек на устойчивость по ортотропной модели дает на 8,5% завышенные значения критических усилий. В то же время, как следует из расчетов, повышение критических усилий достигается запрещением взаимного поворота торцов:  $T^*_{11ан}=134,84$  кН/м, что на 9,8% выше полученного для оболочки без стеснения  $u_2$ . Отметим, что максимальное окружное смещение на торце в момент потери устойчивости весьма значительно:  $|u_2|_{\max}=0,495$  мм (при  $u_2(0, \alpha_3)=u_2(L, \alpha_3)=0$   $|u_2|_{\max}=0,19$  мм развиваются в сечении на расстоянии  $L/4$  от торца). На рис. 2—а и 2—б представлены распределения тангенциальных (в сечении  $\alpha_1=L/2$ ) и поперечных составляющих ( $\alpha_1=L/8$ ) напряжений по толщине оболочки по достижении  $T^*_{11}$ . Заметим, что в случае рассмотрения оболочки как ортотропной практически подтверждаются гипотезы сдвиговых теорий оболочек;  $\sigma_{11}$  распределены по толщине линейно,  $\sigma_{13}$  — по закону квадратной параболы. Иначе обстоит дело для анизотропной оболочки: даже при малой относительной толщине ( $H/R=1/250$ ) напряжения распределены по толщине по сложным законам, при этом  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{23}$ , обусловленные анизотропией, — величины одного порядка с  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{13}$  соответственно.

Таким образом, расчет перекрестно армированных оболочек на устойчивость как ортотропных дает завышенные значения усилий потери устойчивости. Для повышения устойчивости перекрестно армированных оболочек необходимо стеснение окружных перемещений. Следует провести более полный анализ влияния анизотропии на основе решения задачи устойчивости в неосесимметричной пространственной постановке [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носатенко П. Я. Исследование геометрически нелинейного напряженно-деформируемого состояния анизотропных оболочек вращения методом конечных элементов. — Деп. в ВИНТИ 11.03.84, № 1526-84. — 38 с.
2. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. — Калинин, 1986. — С. 120...129.
3. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов. — 1988. — № 4. — С. 684...690.
4. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Соппротивление жестких полимерных материалов. — Рига, 1972. — 498 с.
5. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. О численном обосновании существования и единственности решения геометрически нелинейной задачи теории упругости // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 289, № 4. — С. 821...824.
6. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Постановка пространственной задачи конечно-элементного исследования устойчивости анизотропных оболочек вращения // XXII Всесоюз. науч. совещ. по проблемам прочности двигателей. Тез. докл. — М., 1988. — С. 137...139.

Научно-производственное объединение  
машиностроения, Реутов

Поступило в редакцию 26.02.90  
Received February 26, 1990

Механика композитных материалов. —  
1991. — № 1. — С. 167...169